FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Objectifs

1. Trigonométrie :
   - *Définir le cercle trigonométrique, la longueur d'arc, le radian.*
   - *Connaître l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique (image d'un réel sur le cercle trigonométrique).*
   - *Définir le cosinus et le sinus d'un nombre réel et faire le lien avec les définitions données en collège.*
   - *Calculer et connaître les valeurs remarquables du sinus et du cosinus*
2. Fonctions trigonométriques :
   - *Définir les fonctions sinus et cosinus.*
   - *Étudier la parité et la périodicité de ces fonctions.*
   - *Déterminer le tableau de variation de chacune des deux fonctions.*
   - *Représenter graphiquement ces fonctions.*

I Un peu d'histoire...

Le mot « trigonométrie » vient du grec « trigone » (triangle) et « metron » (mesure). Le mot « ardha-jiva » (demi-corde) a donné le mot sinus, sans doute à la suite d'une erreur de traduction du passage d'un texte indien à un texte arabe. La trigonométrie a été étudiée très tôt dans de nombreuses civilisations, principalement par des astronomes, d'abord pour mesurer des cordes de cercle puis pour des calculs dans un triangle rectangle.

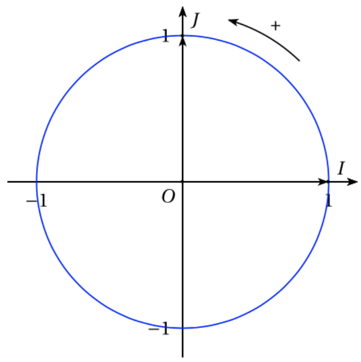
Quelques noms attachés à cette histoire : al-Khuwārizmī, Archimède,...mais aussi :

- Les **babyloniens** (entre 4000 et 2000 avant J-C) utilisaient des tables pour résoudre des problèmes liés à l'astronomie. On leur doit le système en base 60.
- **Hipparque de Nicée**, astronome et mathématicien grec (II^{ème} siècle avant J-C) construisit les premières tables trigonométriques sous la forme de « tables des cordes » : elles faisaient correspondre à chaque valeur de l'angle au centre (avec une division du cercle en 360°), la longueur de la corde interceptée dans le cercle, pour un rayon fixe donné.
- Claude **Ptolémée**, astronome, mathématicien et géographe grec qui vécu à Alexandrie ((II^{ème} siècle), expose dans son traité devenu célèbre, "l'almageste", toute la trigonométrie de l'antiquité. Il explique comment calculer des longueurs de cordes et publie une table très complète.
- **Aryabhata l'Ancien** astronome et mathématicien indien (V-VI^{ème} siècle) utilise la demi-corde et donne les premières tables de sinus. On retrouve la configuration du sinus dans le triangle rectangle telle qu'elle est enseignée au collège aujourd'hui. Aryabhata est le premier à voir la trigonométrie hors du cercle. Il employait les mots jya pour le sinus, kojya pour le cosinus,
- **François Viète**, maître des requêtes et cryptographe pour Henri IV, est un mathématicien « amateur » français (VI^{ème} siècle). Il est le fondateur de notre algèbre moderne et fera évoluer la trigonométrie pour lui donner le caractère qu'on lui connaît aujourd'hui.

II Trigonométrie

II.1 Cercle trigonométrique et droite des réels

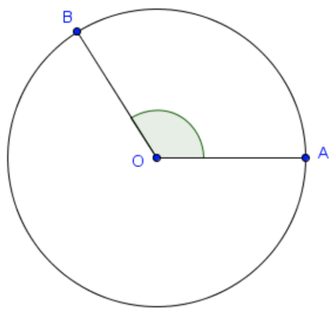
Définition 1
Soit C un cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le **sens direct** (appelé aussi sens positif ou **sens trigonométrique**) qui, par convention, est le sens inverse des aiguilles d'une montre (ou encore le sens giratoire). Le sens inverse étant appelé le **sens indirect**.



- Un tel cercle est appelé **cercle trigonométrique**.
- Si M est un point du cercle tel que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ est égale au rayon du cercle trigonométrique alors l'angle au centre $\widehat{IOM}$ qui intercepte cet arc a pour mesure 1 **radian**.
  Notation : $\widehat{IOM} = 1$ rad.

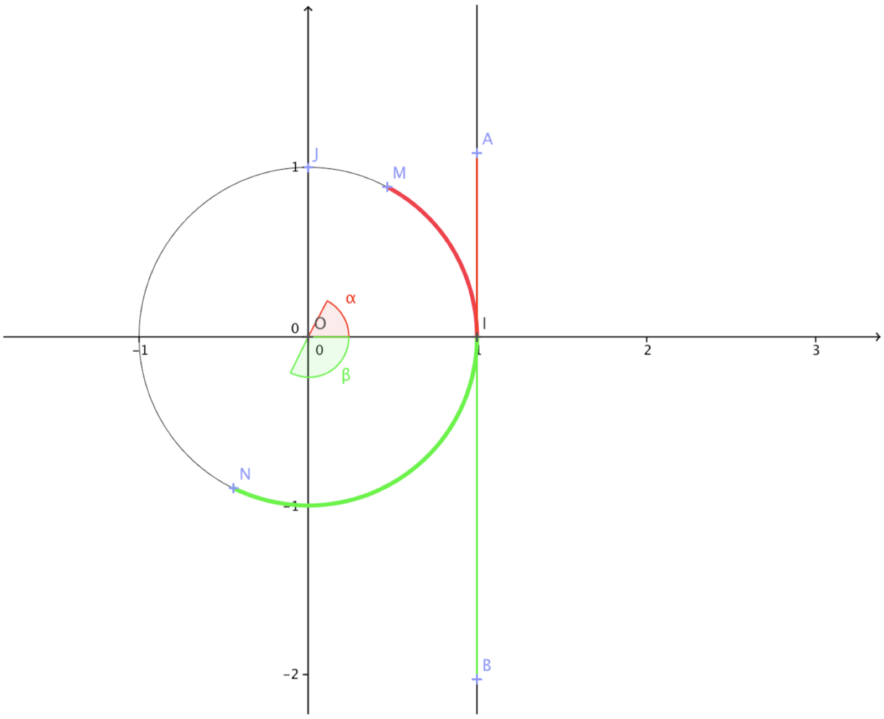
Remarques

1. Le périmètre d'un cercle étant égal à $2\pi r$, le cercle trigonométrique a un périmètre de longueur 2π.
2. Puisque dans un cercle, il y a proportionnalité entre les mesures des angles au centre et les longueurs des arcs interceptés par ces angles, dans le cercle trigonométrique, la mesure d'un angle au centre en radian est égale à la longueur de l'arc intercepté par cet angle : $\overset{\frown}{IM}= \widehat{IOM}$ rad.
   Abus de langage : on note de la même manière l'arc et sa longueur et l'angle et sa mesure...
3. Plus généralement, toujours pour des raisons de proportionnalité, si un cercle est de rayon r et que l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est intercepté par l'angle au centre $\widehat{AOB}$, la mesure de $\overset{\frown}{AB}$ est égale au produit de r par la mesure en radian de $\widehat{AOB}$:
$$\overset{\frown}{AB} = r \times \widehat{AOB}$$



Propriété 1
« Enroulement » de la droite des réels

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ;I,J) on considère le cercle trigonométrique de centre O et « la droite des réels » représentée par la droite tangente au cercle en I.



En « enroulant » la droite sur le cercle dans le sens direct pour les réels positifs et dans le sens indirect pour les réels négatifs, on obtient :

- À tout réel x on associe un unique point M du cercle.
- À tout point M du cercle est associé une infinité de réels.
  Si x est l'un d'eux, tous les autres sont de la forme $x + 2k\pi$ avec k un entier relatif.
- Pour un point M donné, il existe un unique réel dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, appelé la **mesure principale** de l'angle $\widehat{IOM}$ exprimé en radians.

Remarques

- Pour tout réel x de l'intervalle $[0, 2\pi[$, si M est le point du cercle trigonométrique associé à x alors $x = \widehat{IOM}$ rad mais x est aussi la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$.
- Comme il y a proportionnalité entre les mesures des angles et les longueurs des arcs, on peut passer d'une mesure en degrés à une mesure en radians en multipliant par le coefficient de proportionnalité $\dfrac{\pi}{180}$.

EXERCICE

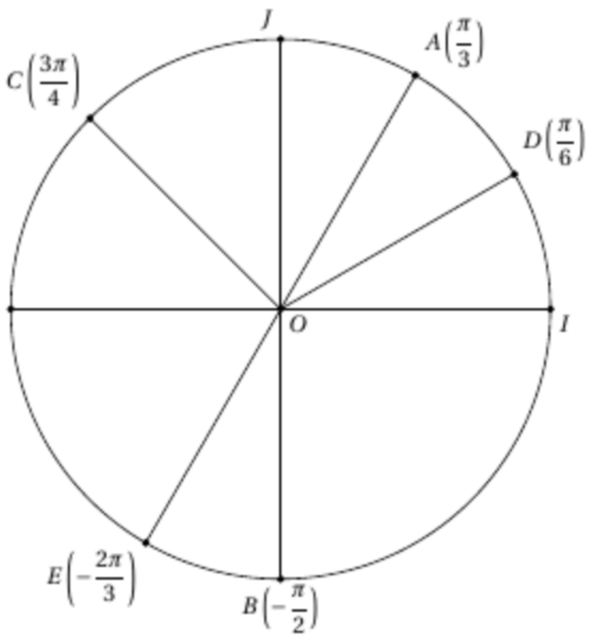
Placer sur le cercle trigonométrique les points A, B, C, D, E, F, G respectivement associés aux nombres suivants :

$$\frac{\pi}{3} \qquad -\frac{\pi}{2} \qquad \frac{3\pi}{4} \qquad \frac{\pi}{6} \qquad -\frac{2\pi}{3} \qquad \frac{25\pi}{4} \qquad \frac{281\pi}{8}$$

Corrigé de l'exercice

Il y a proportionnalité entre les mesures des angles en degrés et celles en radians.

Mesure en radians	$\dfrac{\pi}{3}$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{6}$	$-\dfrac{2\pi}{3}$
Mesure en degrés					



Déterminons la mesure principale de $\dfrac{25\pi}{4}$

La division euclidienne donne : $25 = 6 \times 4 + 1$

donc $\dfrac{25\pi}{4} = \dfrac{(6 \times 4 + 1)\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 6\pi = \dfrac{\pi}{4} + 3 \times 2\pi$

La mesure principale de $\dfrac{25\pi}{4}$ est donc $\dfrac{\pi}{4}$.

Le point F associé à $\dfrac{25\pi}{4}$ est tel que $\widehat{IOM} = 45°$ dans le sens direct.

Déterminons la mesure principale de $\dfrac{281\pi}{8}$

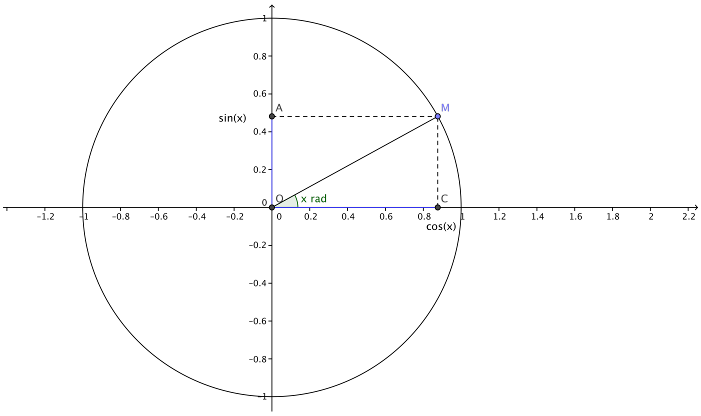
La division euclidienne donne : $281 = 35 \times 8 + 1$

donc $\dfrac{281\pi}{8} = \dfrac{(35 \times 8 + 1)\pi}{8} = \dfrac{\pi}{8} + 35\pi = \dfrac{\pi}{8} - \pi + 36\pi = -\dfrac{7\pi}{8} + 18 \times 2\pi$

La mesure principale de $\dfrac{281\pi}{8}$ est donc $-\dfrac{7\pi}{8}$.

Le point G associé à $\dfrac{281\pi}{8}$ est tel que $\widehat{IOM} = 157,5°$ dans le sens indirect.

II.2 Cosinus et sinus d'un nombre réel



Définition 2

Soit x un réel quelconque. Dans le repère orthonormé (O ; I , J),

- le **cosinus** du réel x, noté $\cos x$, est l'abscisse du point M associé au réel x sur le cercle trigonométrique.
- le **sinus** du réel x, noté $\sin x$, est l'ordonnée du point M associé au réel x sur le cercle trigonométrique.

Remarque

Dans le cas où on se place dans le premier quart de cercle, pour $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, soit un angle de mesure appartenant à $]0°; 90°[$, en considérant le triangle OMC rectangle en C on a :

$$\frac{\text{longueur du côté adjacent}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{\cos x}{1} = \cos x \text{ et } \frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{\sin x}{1} = \sin x$$

La trigonométrie vue au collège dans le triangle rectangle se prolonge pour tout réel grâce à cette nouvelle définition.

Propriété 2

Soit x un réel quelconque,

1. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
2. $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

Démonstration

Soit x un réel et M le point associé au réel x sur le cercle trigonométrique.

1. Considérons les points A et C, respectivement les projetés orthogonaux de M sur l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses. Le repère étant orthonormé, le quadrilatère $OAMC$ est un rectangle et le triangle OMC un triangle rectangle en C.
   Le théorème de Pythagore donne $OM^2 = OC^2 + MC^2$, soit $OM^2 = OC^2 + OA^2$.
   Par définition, le cercle trigonométrique est de rayon 1, $OA = |\sin x|$ et $OC = |\cos x|$, donc
   $OM^2 = OC^2 + OA^2$ donne $1 = (|\sin x|)^2 + (|\cos x|)^2$.
   D'où le résultat : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
2. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.
   Or un carré est toujours positif donc : $\cos^2 x \geqslant 0$ et $\sin^2 x \geqslant 0$,
   avec $\sin^2 x \geqslant 0 \Leftrightarrow -\sin^2 x \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \sin^2 x \leqslant 1 \Leftrightarrow \cos^2 x \leqslant 1$.
   Finalement $0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$.
   Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, $0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant |\cos x| \leqslant 1$, soit $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.
   on fait de même pour le sinus.
   <u>Autre méthode</u> :
   Puisque le cercle trigonométrique est de rayon 1, l'abscisse et l'ordonnée de M sont des réels compris entre -1 et 1.
   D'où le résultat : $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

II.3 Valeurs remarquables

Mesure en degrés	0	30	45	60	90
Mesure en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sinus					
cosinus					

<u>**Démonstration**</u>

<u>Pour 30° et 60°</u> :

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 1 (ce triangle a trois angles de 60° et H le pied de la perpendiculaire à $[BC]$ passant par A.

La hauteur d'un triangle équilatéral est aussi médiane et bissectrice. Donc, par définition, ABH est un triangle rectangle en H, $\widehat{BAH} = 60° : 2 = 30°$ et H est le milieu de $[BC]$ (soit $BH = \dfrac{1}{2}$).

Le théorème de Pythagore, dans le triangle ABH, donne $AB^2 = AH^2 + BH^2$,

donc : $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 1^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$, et donc $AH = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Toujours dans ABH, les formules de trigonométrie donnent :

$\cos 30° = \sin 60° = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin 30° = \cos 60° = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2}$

<u>Pour 45°</u> : Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que $AB = AC = 1$ (ce triangle a deux angles de 455°.

Le théorème de Pythagore donne : $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

Donc $BC = \sqrt{2}$.

Les formules de trigonométrie donnent : $\sin 45° = \cos 45° = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

III Fonctions trigonométriques

III.1 Définition

Définition 3

1. La fonction qui à tout réel x associe le réel $\cos x$ est appelée fonction cosinus et est notée :

$$\cos : x \longmapsto \cos(x)$$

2. La fonction qui à tout réel x associe le réel $\sin x$ est appelée fonction sinus et est notée :

$$\sin : x \longmapsto \sin(x)$$

Remarques

- On notera indifféremment $\cos(x)$ ou $\cos x$ et $\sin(x)$ ou $\sin x$
- x est une mesure en radian d'un angle orienté donc $D_{\sin} = \mathbb{R}$ et $D_{\cos} = \mathbb{R}$.
- Les images par les fonctions sinus et cosinus sont respectivement les abscisses et les ordonnées de points situés sur le cercle trigonométrique donc ces deux fonctions sont à valeurs dans l'intervalle $[-1; 1]$
- Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

III.2 parité

Soit $x \in \mathbb{R}$, considérons $M(\cos x; \sin x)$ le point du cercle trigonométrique associé au réel x et $M'(\cos(-x); \sin(-x))$ le point associé au réel $-x$. Comme M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, on en déduit que :

$$\cos(-x) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(-x) = -\sin x$$

Propriété 3

1. La fonction cosinus est paire. Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos x$.
   Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. La fonction sinus est impaire. Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin x$.
   Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'origine du repère.

Remarques

1. Plus généralement...
   (a) Une fonction f est dite paire si :
   - $\forall x \in D_f, -x \in D_f$
   - $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$.

   Dans ce cas la représentation graphique de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

   (b) Une fonction f est dite impaire si :
   - $\forall x \in D_f, -x \in D_f$
   - $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$.

   Dans ce cas la représentation graphique de f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

2. L'étude d'une fonction paire ou impaire sera fera sur $\mathbb{R}^+$ puisque l'on peut utiliser les symétries pour déduire l'étude sur $\mathbb{R}^-$.

EXERCICE

1. Citer une fonction paire et une fonction impaire.
2. Donner la parité de $f : x \longmapsto \sin x(x^3 + \sin x \cos x)$

III.3 Périodicité

Soit x un réel. Le point M associé à x sur le cercle trigonométrique est aussi associé à $x+2\pi$.
Par suite, on a :

$$\cos(x+2\pi)=\cos x \qquad \text{et} \qquad \sin(x+2\pi)=\sin x$$

Propriété 4

1. La fonction cosinus est 2π-périodique. Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x+2\pi)=\cos x$.
   Sa courbe représentative s'obtient à partir de la représentation de la fonction cosinus sur un intervalle d'amplitude 2π par des translations de vecteur $2k\pi\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. La fonction sinus est 2π-périodique. Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x+2\pi)=\sin x$.
   Sa courbe représentative s'obtient à partir de la représentation de la fonction sinus sur un intervalle d'amplitude 2π par des translations de vecteur $2k\pi\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remarques

1. Plus généralement ...
   Une fonction f est dite T-périodique si :
   - $\forall x \in D_f, (x+T) \in D_f$
   - $\forall x \in D_f, f(x+T)=f(x)$.

   Dans ce cas la représentation graphique de f est obtenue par des translations de vecteur $kT\vec{i}$, avec $k \in \mathbb{Z}$, à partir de sa courbe représentative sur un intervalle d'amplitude T.
2. T est appelée la période.
3. L'étude de la fonction se fera sur un intervalle d'amplitude T

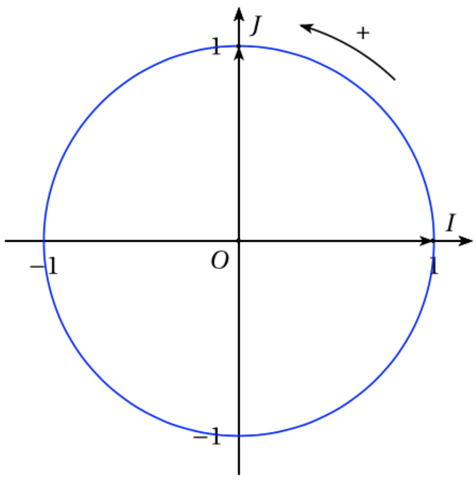
Exemples

Soit $f : x \longmapsto \cos 2x+1$. Cette fonction, composée d'une fonction affine par la fonction cosinus, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$, est définie sur $\mathbb{R}$.
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+\pi)=\cos(2\times(x+\pi))+1=\cos(2x+2\pi)+1$.
Or la fonction cosinus est 2π-périodique donc $f(x+\pi)=\cos(2x)+1=f(x)$. Et donc f est π-périodique.

III.4 Étude des fonctions sinus et cosinus

Remarques

1. Les fonctions sinus et cosinus étant 2π-périodiques, l'étude de ces fonctions se fait sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ d'amplitude 2π. De plus la fonction sinus étant impaire et la fonction cosinus étant paire, on peut encore restreindre l'ensemble d'étude à sa partie positive. Ainsi on étudiera ces deux fonctions sur l'intervalle $[0; \pi]$.
2. Par lecture graphique sur le cercle trigonométrique on obtient les tableaux de variation ci-dessous sur l'intervalle $[0; \pi]$:



Propriété 5

Tableaux de variations des fonctions cosinus et sinus sur $[0; \pi]$:

x	0		π
$\cos(x)$	1	↘	-1

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	↗	1	↘	0

Représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus